華中科技大學 数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics,Huazhong University of Science and Technology

矩　阵（Matrix）

胡　鹏
School of Mathematics and Statistics
Huazhong University of Sciences and Technology

2025 年 10 月 13 日

目录

目录

矩阵概念的引入

n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 个方程的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的解取决于:

- 系数:
  $a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$
- 常数项: $b_i, i = 1, 2, \cdots, m$

矩阵概念的引入

n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的解取决于：

- 系数：
  $a_{ij}, i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$
- 常数项：$b_i, i = 1, 2, \cdots, m$

高斯消元法

所谓高斯消元法就是对上述线性方程组反复使用如下操作

1. 交换两个方程的位置；
2. 把一个方程的倍数加到另一个方程上；
3. 用一个非零数乘以某个方程的两端；

将方程组化成阶梯型线性方程组，再通过回代予以求解。

去粗存精

由高斯消去法的整个过程可知，实际上只对方程组系数和右端常数项进行了操作，而与具体的未知量没有任何关系，因此提取线性方程组中有用的信息，按照一定规则排列成如下形式（数表）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

去粗存精

由高斯消去法的整个过程可知，实际上只对方程组系数和右端常数项进行了操作，而与具体的未知量没有任何关系，因此提取线性方程组中有用的信息，按照一定规则排列成如下形式（数表）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

于是高斯消元法对方程的操作，就变成对上述数表的行进行操作。

1. 交换两个方程的位置 $\Longleftrightarrow$ 交换两行；
2. 把一个方程的倍数加到另一个方程上 $\Longleftrightarrow$ 将某一行乘以某个数加到另一行上；
3. 用一个非零数乘以某个方程的两端 $\Longleftrightarrow$ 用一个非零数乘以某行；

矩阵的定义

定义 (矩阵)

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵 (Matrix). 通常用大写字母记为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

- a_{ij} 称为该矩阵的第 i 行第 j 列元素;
- $m\times n$ 称为是矩阵的型号;
- 元素全部为实数的矩阵称为实矩阵, 有元素为复数的矩阵称为复矩阵。本课程中的矩阵除特别说明之外, 均指实矩阵。

特殊矩阵

- 只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

称为行矩阵，又称行向量.

- 只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量.

- 当 $m=n=1$ 时，即 $\boldsymbol{A}=[a_{11}]$，此时矩阵退化为一个数。
- 所有元素都为零的矩阵，称为零矩阵. 记为 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

方阵

行数和列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或者 n 阶方阵，记作 $\boldsymbol{A}_n$. 此时 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角元素，其所在直线称为主对角线.

- 上（下）三角矩阵：主对角线下（上）方的元素均为零的方阵. 形如

$$\text{上三角矩阵：}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{下三角矩阵：}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 对角矩阵：不在主对角线上的元素均为零的方阵. 形如

$$\text{对角矩阵：}\boldsymbol{D} = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

方阵

- 单位矩阵：主对角元素均为 1 的对角矩阵，记为 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$ (有些书也用 $\boldsymbol{E}$).

$$\text{单位矩阵：}\ \boldsymbol{I} = diag(1, 1, \cdots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- 数量矩阵：主对角元素均为 k 的对角矩阵.

$$\text{数量矩阵：}\ k\boldsymbol{I} = diag(k, k, \cdots, k) = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

为了方便起见，对于上述特殊方阵中出现的大量零元素，可以不写出来。

矩阵与行列式的区别

主要有以下三点区别：

1. 行列式的本质是一个数；矩阵的本质是一个数表，是一个由数字构成的举行阵列，本身不包含任何运算；
2. 行列式的行数和列数必相等；矩阵的行数和列数不一定相等;
3. 行列式的符号为 $|\cdot|$, 而矩阵的符号只能用 $(\cdot)$ 或 $[\cdot]$.

目录

- 同型矩阵：具有相同行数和相同列数的矩阵，即 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ 是同型矩阵.
- 矩阵相等：若同型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$ 在对应位置上的元素均相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注：

不同型的零矩阵和单位矩阵不相等。

矩阵加法

定义 (矩阵加法)

设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

矩阵加法满足下列运算规律：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 均为 $m\times n$ 矩阵

1. 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;
2. 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;
3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

负矩阵与矩阵减法

设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，记

$$-\boldsymbol{A}=[-a_{ij}]_{m\times n}.$$

称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.

- 显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{O}.$$

- 矩阵减法：设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的差记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

矩阵的数量乘法

定义 (矩阵的数量乘法：简称矩阵数乘)

数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的数量乘积定义为

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}=[ka_{ij}]_{m\times n}$$

注意与行列式的不同：

$$k|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

数乘运算律

按照矩阵数乘的定义，可知数乘运算满足下列运算律：设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{O}$ 均为 $m \times n$ 矩阵，k, l 是数，则有

1. 数对矩阵的分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;
2. 矩阵对数的分配律：$(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;
3. 结合律：$(kl)\boldsymbol{A} = k(l\boldsymbol{A})$;
4. $0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, 1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$，其中 $0, 1$ 为数。

矩阵乘法

矩阵的乘法是阿瑟・凯莱 (Arthur Cayley, 1821∼1895) 于 1858 年根据线性变换乘积的需要提出的.

线性变换

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, {}_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

表示从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, {}_m$ 的线性变换，其中 a_{ij} 为常数。

引例

设有变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2 的线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases} \tag{2}$$

以及变量 t_1, t_2 到变量 x_1, x_2, x_3 的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases} \tag{3}$$

将(3)代入到(2)中可得变量 t_1, t_2 到变量 y_1, y_2 的线性变换

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2 \end{cases} \tag{4}$$

矩阵乘法的定义

如果通过矩阵运算描述上述线性变化过程？因此引出如下矩阵乘法的定义：

定义 (矩阵乘法)

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $s \times n$ 矩阵，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{AB}$，定义为一个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = [c_{ij}]_{m \times n}$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n).$$

当 $m=n=1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别退化称一个 $1\times s$ 的行矩阵和一个 $s\times 1$ 的列矩阵，此时有

$$\boldsymbol{AB}=[a_1,a_2,\cdots,a_s]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_sb_s=\sum_{i=1}^{s}a_ib_i.$$

同时有

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{bmatrix}[a_1,a_2,\cdots,a_s]=\begin{bmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_s\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_s\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_sa_1&b_sa_2&\cdots&b_sa_s\end{bmatrix}$$

由此可见，一般情况下

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}.$$

若两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

注:

1. 定义矩阵乘法一定要求乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，即要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等。
2. 矩阵乘法不满足交换律，即一般情况下 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.，由此可见矩阵乘法时讲究顺序的，称 $\boldsymbol{AB}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{B}$，或者为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$.
3. 两个非零矩阵的乘积可能时零矩阵，即由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 矩阵乘法不满足消去律，即由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}, \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ 不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{C}$.

矩阵乘法的运算律

矩阵乘法不满足交换律和消去律，是矩阵乘法区别于数的乘法的两个重要特点。但是矩阵乘法与数的乘法也有相同或相似的运算律：（假设下面所有运算是有意义的）

1. 结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;
2. 分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}, (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;
3. 数乘结合律：$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$;
4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，则
$$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}$$
即单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 是矩阵乘法的单位元，相当于数的乘法中的数 1.

根据矩阵乘法的定义，线性变换(1)可以写成如下形式

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

故而引例中

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{t} \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \end{bmatrix}$$

此时由变量 t_1, t_2 到变量 y_1, y_2 的线性变换(4)所对应的矩阵则是线性变换(2)和(3)所对应矩阵的乘积。

矩阵的幂

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，定义 $\boldsymbol{A}$ 的正整数幂为

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$$

容易验证 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l}, (\boldsymbol{A}^k)^l = \boldsymbol{A}^{kl}$, 其中 k, l 为正整数。

例 1

下列等式在什么时候成立？

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可交换时成立。

由于数量矩阵 $\lambda \boldsymbol{I}$ 与任意方阵可交换，下式可按二项式定理展开

$$(\boldsymbol{A}+\lambda \boldsymbol{I})^n = \boldsymbol{A}^n + C_n^1 \lambda \boldsymbol{A}^{n-1} + C_n^2 \lambda^2 \boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \lambda^{n-1} \boldsymbol{A} + \lambda_n \boldsymbol{I}$$

由于数量矩阵 $\lambda \boldsymbol{I}$ 与任意方阵可交换，下式可按二项式定理展开

$$(\boldsymbol{A}+\lambda \boldsymbol{I})^n = \boldsymbol{A}^n + C_n^1 \lambda \boldsymbol{A}^{n-1} + C_n^2 \lambda^2 \boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \lambda^{n-1} \boldsymbol{A} + \lambda_n \boldsymbol{I}$$

例 2

计算矩阵的幂 $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n$.

由于数量矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}$ 与任意方阵可交换，下式可按二项式定理展开

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I})^n=\boldsymbol{A}^n+C_n^1\lambda\boldsymbol{A}^{n-1}+C_n^2\lambda^2\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}+\lambda_n\boldsymbol{I}$$

例 2

计算矩阵的幂 $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n$.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\triangleq a\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$$

再利用上述二项展开式即可求。

矩阵多项式

设 $f(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式，即

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m, \quad a_0 \neq 0,$$

$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，则称

$$f(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\boldsymbol{A} + a_m\boldsymbol{I}, \quad a_0 \neq 0,$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次矩阵多项式。

例 3

设 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

矩阵的转置

定义

将 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的行与列互换后得到一个 $n \times m$ 矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^T$，即有

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 显然，$\boldsymbol{A}^T$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行第 i 列的元素.

矩阵转置的运算法则

矩阵的转置也是一种运算，满足下面的运算律（假设运算均有意义）

1. $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$;
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$;
3. $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$，$k$ 为数；
4. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

第 2 和第 4 条运算法则可以推广到有限多个矩阵的情形，即有

$$(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k)^T = \boldsymbol{A}_1^T + \boldsymbol{A}_2^T + \cdots + \boldsymbol{A}_k^T,$$

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{A}_k)^T = \boldsymbol{A}_k^T\boldsymbol{A}_{k-1}^T\cdots\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{A}_1^T.$$

对称矩阵

定义 (对称矩阵与反对称矩阵)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,

- 若 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;
- 若 $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $a_{ij} = a_{ji}$;
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵的充分必要条件是 $a_{ij} = -a_{ji}$, 当 $i = j$ 时, $a_{ii} = 0$, 即反对称矩阵的主对角元素均为 0.

例 4

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ 是反对称矩阵.

例 5

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 都是对称矩阵.

例 6

证明：任何一个 n 阶方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和.

矩阵的行列式

定义 (矩阵的行列式)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

- 只有方阵才有行列式；
- 当 $|\boldsymbol{A}| = 0$，称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵（Singular Matrix）；
- 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵（Nonsingular Matrix）；

矩阵行列式的性质

由行列式的性质以及矩阵行列式的定义可知，矩阵行列式具有如下性质：

矩阵行列式的性质:

1. $|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$;
2. $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$，这里的 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数。此性质表明矩阵行列式运算不具有线性性（易错点）；
3. $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为方阵;

- 第 3 条性质可以用拉普拉斯定理证明。

目录

逆矩阵

前面已经定义了矩阵的加法，减法，乘法，如何定义矩阵的“除法”?

- 在数的除法中，若 $b \neq 0$，可以利用倒数来定义除法，即将数的除法转为乘积形式

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

- 对于非零数，可以通过如下方式定义倒数：如果两个数乘积为 1，则这两个数互为倒数。即 $b \neq 0$，有

$$b \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times b = 1$$

在矩阵乘法中，n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 有类似于数 1 的作用，因此类似于倒数的定义方式，引出逆矩阵的定义。

逆矩阵的定义

定义 (逆矩阵)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵 (invertible matrix)，简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵（或逆（inverse）)，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

- 按照定义可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵；
- 只有方阵才可能有逆矩阵；
- 逆矩阵的记号为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，切记不可写成 $\frac{1}{\boldsymbol{A}}$;
- 逆矩阵存在则唯一；
- 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，即矩阵可逆即为矩阵非奇异.

伴随矩阵

定义 (伴随矩阵)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，其行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}按照如下方式构成的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

定理 (伴随矩阵的性质)

设 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

定理 (逆矩阵的求法)

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

例 7

下列矩阵是否可逆？如果可逆，求出其逆矩阵.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 定理虽然给出了逆矩阵的求法，但在实际过程中，当矩阵阶数很大时，计算量相当大，因此如何快速求解矩阵的逆是数值线性代数重要研究课题。
- 矩阵可逆的条件可以适当弱化：若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

例 8

设对角矩阵

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$，求其逆矩阵。

例 9

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式

$$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} - 10\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O},$$

证明：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求出它们的逆矩阵。

例 10

设方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$(此时称 $\boldsymbol{B}$ 为幂等矩阵)，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆矩阵的性质

逆矩阵的性质:

1. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$;
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，$k$ 为非零数；
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵；推广到 k 个可逆矩阵的情形，即有

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{A}_k)^{-1} = \boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

4. $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$;
5. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.

当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$;
2. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ (注意：当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，不能得到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$).

伴随矩阵常用结论：了解

由逆矩阵的定义和性质，可得如下伴随矩阵的常用结论：

可逆矩阵的伴随矩阵常用结论

假设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则有

1. $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;
2. $(\boldsymbol{A}^*)^T = (\boldsymbol{A}^T)^*$;
3. $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$，$k$ 为非零数；
4. $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$;
5. $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, (n \geq 2)$.

例 11

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆，当

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

时，求 $\boldsymbol{B}$.

线性方程组的逆矩阵解法

考虑 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$$

$$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$$

则上述线性方程组可以写成如下矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}.$$

如果 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则上述线性方程组的解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

这与用 Cramer 法则得到的方程组的解是一致的。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}[\sum_{k=1}^{n} A_{k1}b_k, \sum_{k=1}^{n} A_{k2}b_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} A_{kn}b_k]^T$$

$$= [\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D}]^T$$

类似的，若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $n \times k$ 矩阵，则矩阵方程

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

的解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

例 12

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

目录

矩阵的分块

对于行数和列数较高的矩阵 $\boldsymbol{A}$，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算。

- 例如将一个 5 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

用水平和垂直的虚线分成 4 块，如果记

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

此时可以把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看成由上面 4 个小矩阵所组成，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

- 务必注意这里的 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是矩阵符号，与行列式的代数余子式不同。
- 无论矩阵如何分块，实际的行数和列数并没有发生变化。例如上述矩阵只是形式上是一个 2×2 矩阵，本质是一个 5×5 矩阵。

分块矩阵

把一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，在行的方向分成 s 块，在列的方向分成 t 块，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $s\times t$ 分块矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$，其中 $\boldsymbol{A}_{kl}, k=1,2,\cdots,s, l=1,2,\cdots,t$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块（子矩阵）。它们可以是各种类型的小矩阵。

常用分块矩阵

- 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 按行分块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix},\text{其中}\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}],i=1,2,\cdots,m.$$

- 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 按列分块：

$$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\right],$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^T,j=1,2,\cdots,n.$

常用分块矩阵

- 对角块矩阵：当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 中非零元素都集中在主对角线附近，可将 $\boldsymbol{A}$ 分成下面的对角块矩阵（又称准对角矩阵）：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i, i=1,2,\cdots,s$ 是 r_i 阶方阵 $(\sum_{i=1}^{s} r_i=n)$.

对角块矩阵例子

设

$$
\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:ccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=[5].
$$

常用分块矩阵

- 准下三角块矩阵：设有 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，可分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & & \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}, i=1,2,\cdots,s$ 是 r_i 阶方阵 $(\sum_{i=1}^{s} r_i=n)$.

- 准上三角块矩阵：设有 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，可分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{ss} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}, i=1,2,\cdots,s$ 是 r_i 阶方阵 $(\sum_{i=1}^{s} r_i=n)$.

分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同型$m \times n$ 矩阵，用相同分法将 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分块为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1s} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rs} \end{bmatrix}$$

其中每一个 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为同型子块矩阵，则

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} + \boldsymbol{B}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} + \boldsymbol{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} + \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} + \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} + \boldsymbol{B}_{rs} \end{bmatrix}.$$

分块矩阵的数量乘法和转置

- 分块矩阵的数量乘法

$$k\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k\boldsymbol{A}_{11} & k\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1s} \\ k\boldsymbol{A}_{21} & k\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\boldsymbol{A}_{r1} & k\boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{rs} \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵的转置

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^T & \boldsymbol{A}_{21}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{r1}^T \\ \boldsymbol{A}_{12}^T & \boldsymbol{A}_{22}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1s}^T & \boldsymbol{A}_{2s}^T & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}^T \end{bmatrix}$$

操作过程可以看作是先将分块矩阵按块作转置，之后再将每个子块转置。

分块矩阵乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times k$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $k\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 进行分块，使得 $\boldsymbol{A}$ 的列分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行分法一致，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & \cdots & k_s \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{bmatrix} \end{array},\quad \boldsymbol{B}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_p \end{array} \\ \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1p} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sp} \end{bmatrix} \end{array},$$

其中子块 $\boldsymbol{A}_{it}$ 为 $m_i\times k_t$ 矩阵，$\boldsymbol{B}_{tj}$ 为 $k_t\times n_j$ 矩阵，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{r1} & \boldsymbol{C}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rs} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{t=1}^{s}\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}\text{是}m_i\times n_j\text{子矩阵}.$$

与普通矩阵乘法规则在形式上是相同的。

准对角矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶准对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}_i, i=1,2,\cdots,s$ 为同阶方阵，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_s\end{bmatrix}$$

准对角矩阵的行列式和逆

准对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式有如下计算公式

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|.$$

- $|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Longleftrightarrow |\boldsymbol{A}_i| \neq 0, \forall i = 1, 2, \cdots, s$，即准对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是每一个子矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

例 13

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

用分块矩阵的方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 14

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{bmatrix}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}_1$ 为 r 阶子方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

目录

回顾高斯消元法

考虑 n 个未知量 m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

高斯消元法解方程的过程等价于对增广矩阵的操作过程：

1. 交换两个方程的位置 $\iff$ 交换增广矩阵的两行；
2. 把一个方程的倍数加到另一个方程上 $\iff$ 将增广矩阵的某一行乘以某个数加到另一行上；
3. 用一个非零数乘以某个方程的两端 $\iff$ 用一个非零数乘以增广矩阵的某行；

初等变换

定义 (初等变换)

下列三种对矩阵的变换，统称为矩阵的初等变换：

1. 对换变换：交换矩阵的第 i 行（列）和第 j 行（列）的位置，即为 $r_i \leftrightarrow r_j$ （$c_i \leftrightarrow c_j$）;
2. 倍乘变换：用一个非零常数 k 乘矩阵的第 i 行（列），记为 kr_i （kc_i）;
3. 倍加变换：把矩阵的第 j 行（列）元素的 k 倍加到第 i 行（列）上，记为 $r_i + kr_j$ （$c_i + kc_j$）.

行阶梯形矩阵

定义 (行阶梯形矩阵)

一个矩阵，如果从第 1 行起，每行的第一个非零元素前面的零的个数逐行增加，一旦出现零行，则后面各行（如果还有的话）都是零行，则称为**行阶梯形矩阵**, 其形式如下

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} & & & k_1 & & & & k_2 & & & k_r & & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_r & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \text{ 个非零行} \\ \\ \\ \\
\end{array}, \tag{5}$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r$, $*$ 部分可能是非零数.

例如：如下矩阵均为行阶梯形矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，通过行初等变换可以把 $\boldsymbol{A}$ 化为形如(5)的行阶梯形。

行最简形矩阵（行标准形）

进一步，通过行初等变换，将行阶梯矩阵所有非零行的第一个元素化为 1，且将该元素所在列的其他元素化为 0，即可得如下形式的行最简形矩阵，（教材上称行标准形）

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & k_1 & & & & k_2 & & & k_r & & & \\
\end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

r 个非零行

阶梯形化最简形

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

阶梯形化最简形

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{r_1+(-1)r_3 \\ r_2+(-2)r_3}}$$

阶梯形化最简形

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+(-2)r_3]{r_1+(-1)r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

等价标准形

再进一步，通过列初等变换可以将矩阵化为更简单的形式如下：

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots\\ 1\end{array}}\right\} r\text{ 行} \\ \vphantom{\begin{array}{c}0\\ \ddots\\ 0\end{array}} \end{array} \end{array} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{6}$$

称上式为矩阵的等价标准形。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

等价标准形

再进一步，通过列初等变换可以将矩阵化为更简单的形式如下：

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\right. \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} r\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{6}$$

称上式为矩阵的等价标准形。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_5+(-7)c_1 \\ c_5+(-9)c_2 \\ c_5+3c_4}]{\substack{c_3+c_1 \\ c_3+c_2}}$$

等价标准形

再进一步，通过列初等变换可以将矩阵化为更简单的形式如下：

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\right\} r\text{ 行} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{6}$$

称上式为矩阵的等价标准形。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_5+(-7)c_1 \\ c_5+(-9)c_2 \\ c_5+3c_4}]{\substack{c_3+c_1 \\ c_3+c_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

等价标准形

再进一步，通过列初等变换可以将矩阵化为更简单的形式如下：

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\right. \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\} r\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{6}$$

称上式为矩阵的等价标准形。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_5+(-7)c_1 \\ c_5+(-9)c_2 \\ c_5+3c_4}]{\substack{c_3+c_1 \\ c_3+c_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4}$$

等价标准形

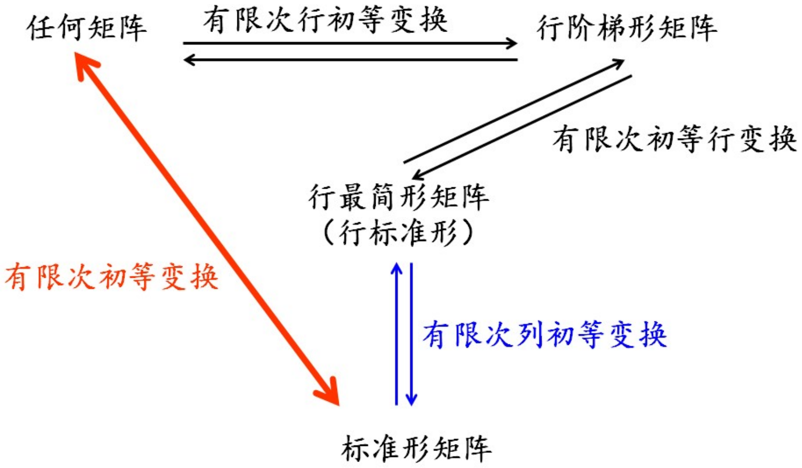
再进一步，通过列初等变换可以将矩阵化为更简单的形式如下：

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\right\} r\text{ 行} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \tag{6}$$

称上式为矩阵的等价标准形。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_5+(-7)c_1 \\ c_5+(-9)c_2 \\ c_5+3c_4}]{\substack{c_3+c_1 \\ c_3+c_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

总结


任何矩阵
有限次行初等变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
（行标准形）
有限次初等变换
有限次列初等变换
标准形矩阵

初等矩阵

定义 (初等矩阵)

将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 进行一次初等变换所得的矩阵，统称为初等矩阵.

- 初等对换矩阵：交换单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行和第 j 行，得到的矩阵记为 $\boldsymbol{R}_{ij}$，即

$$\boldsymbol{R}_{ij} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

- 初等倍乘矩阵：用一个非零常数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行，得到的矩阵记为 $\boldsymbol{R}_{i(k)}$，即

$$\boldsymbol{R}_{i(k)} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

- 初等倍加矩阵：将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，得到的矩阵记为 $\boldsymbol{R}_{i+j(k)}$，即

$$
\boldsymbol{R}_{i+j(k)} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& 1 & \cdots & k &&& \\
&&&& \ddots & \vdots &&& \\
&&&&& 1 &&& \\
&&&&&& 1 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

初等矩阵

用列初等变换也可以得到相应的三类初等矩阵:

1. 交换单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列和第 j 列，得到的矩阵记为 $\boldsymbol{C}_{ij}$;
2. 用一个非零常数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列，得到的矩阵记为 $\boldsymbol{C}_{i(k)}$;
3. 将单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上，得到的矩阵记为 $\boldsymbol{C}_{i+j(k)}$.

$$\boldsymbol{R}_{ij}=\boldsymbol{C}_{ij},\ \boldsymbol{R}_{i(k)}=\boldsymbol{C}_{i(k)},\ \boldsymbol{R}_{i+j(k)}=\boldsymbol{C}_{j+i(k)}.$$

初等变换与矩阵乘法

引例

计算下列矩阵的乘积

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & k\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

引例

计算下列矩阵的乘积

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次行初等变换，相当于用相应的初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$；对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次列初等变换，相当于用相应的初等矩右左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$.

- 左乘则行变，右乘则列变。

初等矩阵的逆

由行列式的性质可知，所有初等矩阵的行列式均不为零，故初等矩阵均可逆，且有

$$\boldsymbol{R}_{ij}\boldsymbol{R}_{ij}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{R}_{i(\frac{1}{k})}\boldsymbol{R}_{i(k)}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{R}_{i+j(-k)}\boldsymbol{R}_{i+j(k)}=\boldsymbol{I}$$

故有

$$\boldsymbol{R}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{R}_{ij},\quad \boldsymbol{R}_{i(k)}^{-1}=\boldsymbol{R}_{i(\frac{1}{k})},\quad \boldsymbol{R}_{i+j(k)}^{-1}=\boldsymbol{R}_{i+j(-k)}.$$

同理可得

$$\boldsymbol{C}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{C}_{ij},\quad \boldsymbol{C}_{i(k)}^{-1}=\boldsymbol{C}_{i(\frac{1}{k})},\quad \boldsymbol{C}_{i+j(k)}^{-1}=\boldsymbol{C}_{i+j(-k)}.$$

矩阵的等价

定义 (矩阵等价)

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过行（列）初等变换可化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行（列）等价. 若 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换可化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

矩阵等价的性质

1. 自反性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;
2. 对称性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$;
3. 传递性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

矩阵的等价

由前面的介绍可知，任给一个矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，均可以通过行列初等变换得到其等价标准形

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\xrightarrow[\text{行初等变换}]{\text{列初等变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix},$$

即存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_t$ 及 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_s$，使得

$$\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_{t-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

若令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_{t-1}\cdots\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s,$$

则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 均可逆，且

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

可逆矩阵的初等矩阵表示

由上面的推导可知：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{I}_n$，即存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_t$ 及 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_s$，使得

$$\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{P}_{t-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s = \boldsymbol{I}_n,$$

可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_t^{-1}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1^{-1}\\ &= \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_t^{-1}\boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_{s-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1^{-1}\end{aligned}$$

由于初等矩阵的逆还是初等矩阵，可得：可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为初等矩阵的乘积。

定理

$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$.

初等变换求逆法

进一步，由

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_s P_t P_{t-1} \cdots P_1 A = I_n$$

可得：可逆矩阵 A 可以经过若干次行初等变换化为单位矩阵；同理也有：可逆矩阵 A 可以经过若干次列初等变换化为单位矩阵。

初等变换求逆法

如果对可逆矩阵 A 和同阶矩阵 I 做同样的行初等变换，则当 A 变为单位矩阵时，I 就变为 A^{-1}，即

$$\left[\begin{array}{c:c} A & I \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left[\begin{array}{c:c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

- 如果是做同样的列初等变换，则当 A 变为单位矩阵时，I 就变为 A^{-1}，即

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hdashline I \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列初等变换}} \left[\begin{array}{c} I \\ \hdashline A^{-1} \end{array}\right]$$

例 15

用初等变换法计算下面矩阵的逆矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 4 & 4\end{bmatrix}.$$

思考题

行列式计算中行变换、列变换可以任意交替进行，初等变换求逆矩阵时是否也可以行变换、列变换交替进行？

- 用行初等变换求逆矩阵时，必须始终做行变换，其间不能做任何列变换．还有一个本质的原因是：行初等变换求逆矩阵，其过程就是高斯消元法解矩阵方程．

解一般矩阵方程 (1)

思考题

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

解法一： 直接求逆法，先计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$，再计算 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$;

解法二： 行初等变换解法，对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 做同样的行初等变换，则当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位矩阵时，$\boldsymbol{B}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即

$$\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{array}\right] \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{array}\right]$$

例 16

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, 求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

解一般矩阵方程 (2)

思考题

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$.

- 列初等变换解法，对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 做同样的列初等变换，则当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位矩阵时，$\boldsymbol{B}$ 就变为 $\boldsymbol{BA}^{-1}$，即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \hdashline \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \hdashline \boldsymbol{BA}^{-1} \end{bmatrix}$$

例 17

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$.

目录

矩阵秩的概念

定义 (k 阶子式)

在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行 k 列 $(k\leq m, k\leq n)$，位于这些行、列交叉处的 k^2 个元素按原来在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中相对位置构成的 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

- $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式的个数为：$C_m^k\cdot C_n^k$.

定义 (矩阵的秩)

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个 r 阶子式 D 不为零，且所有的 $r+1$ 阶子式（如果存在的化话）全为零，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，记为 $R(\boldsymbol{A})=r$，其中子式 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式。

- 定义零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 的秩为 0.
- 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩即为 $\boldsymbol{A}$ 中最高阶非零子式的阶数.（思考：所有 $r+1$ 阶子式全等于零，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $r+2$ 阶子式是否都等于零？更高阶子式呢？）

由矩阵的定义可知

- 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m, n\}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩既不超过其行数，又不超过其列数.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不等于零，则 $R(\boldsymbol{A}) \geq r$.
- 若 $\boldsymbol{A}$ 所有的 $r+1$ 阶子式均等于零，则 $R(\boldsymbol{A}) \leq r$.
- $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^T), R(\boldsymbol{kA}) = R(\boldsymbol{A})$, k 为非零数.
- n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = n$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵. 此时称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵.

例 18

计算矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩.

矩阵秩的计算

引例

计算矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{bmatrix}$ 的秩.

- 发现：当矩阵规模适当大的时候，按照定义方式去计算矩阵的秩是非常麻烦的事情。例如矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式有 $C_4^3\cdot C_5^3=40$ 个，需要逐一去判断其行列式是否等于 0.

用初等变换求矩阵的秩

对比例 18 和引例，发现行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数。是否可以通过初等变换将一般矩阵化为行阶梯形，再求秩？答案是可行的，下面的定理可以保证方法的正确性。

定理

初等变换不改变矩阵的秩，即 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

定理证明思路如下：

1. 证明 $\boldsymbol{A}$ 经过一次行初等变换为 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A}) \leq R(\boldsymbol{B})$;
2. $\boldsymbol{B}$ 也经过一次行初等变换为 $\boldsymbol{A}$，则 $R(\boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A})$，于是有 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$;
3. 经过一次行初等变换的矩阵秩不变，经过有限次行初等变换的矩阵秩仍然不变;
4. 设 $\boldsymbol{A}$ 经过列初等变换为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^T$ 经过行初等变换为 $\boldsymbol{B}^T$，则有 $R(\boldsymbol{A}^T) = R(\boldsymbol{B}^T)$，再利用 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^T)$ 得到 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

例 19

利用初等变换法计算矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{bmatrix}$ 的秩.

例 20

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda & -1\\ 5 & 6 & 3 & \mu\end{bmatrix}$，已知 $R(\boldsymbol{A})=2$，求 λ 和 μ 的值.

常用矩阵秩的不等式

常用矩阵秩的不等式

- 两个矩阵乘积的秩不超过每个因子的秩，即 $R(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\}$.
- Sylvester(西尔维斯特) 公式：设有矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 以及 $\boldsymbol{B}_{n\times k}$，则有

$$R(\boldsymbol{AB}) \geq R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - n.$$

特别的，当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 时有 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \leq n$.

- 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.
- 设有矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 以及 $\boldsymbol{B}_{m\times k}$，则有

$$\max\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\} \leq R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leq R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}).$$

特别的，当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$ 为非零列向量时，有 $R(\boldsymbol{A}) \leq R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \leq R(\boldsymbol{A}) + 1$.

例题：矩阵秩的不等式应用

例 21

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \geq n$.

例 22：教材 P64，例 24

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵，即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.

例 23：教材 P64，例 25

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶幂等矩阵，即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆，证明 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

例 24

若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{C}$，且 $R(\boldsymbol{A})=n$，证明 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{C})$.

- 当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为列满秩矩阵.
- 当一个矩阵的秩等于它的行数时，这样的矩阵称为行满秩矩阵.
- 当一个矩阵为方阵时，列满秩矩阵就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.

例 24 中，当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$ 时，此时有

- 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.
- 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{B}$ 为行满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

Thanks for your attention!