行 列 式 (Determinant)

———行列式的定义

胡 鹏
School of Mathematics and Statistics
Huazhong University of Sciences and Technology

2025 年 9 月 24 日

目录

目录

行列式的由来

行列式的概念最早是在求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组时提出的。

行列式的由来

行列式的概念最早是在求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组时提出的。

- 1683 年，日本数学家关孝和在其著作《解伏题之法》中独立提出了行列式的概念。通过“行列式”（他称之为“行列”）来求解方程组，并给出了二阶、三阶乃至五阶行列式的展开方法，以及行列式展开的“逐式”方法（类似于拉普拉斯展开）。

行列式的由来

行列式的概念最早是在求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组时提出的。

- 1683 年，日本数学家关孝和在其著作《解伏题之法》中独立提出了行列式的概念。通过“行列式”（他称之为“行列”）来求解方程组，并给出了二阶、三阶乃至五阶行列式的展开方法，以及行列式展开的“逐式”方法（类似于拉普拉斯展开）。
- 1693 年，德国数学家莱布尼茨使用指标系统（下标）表示方程组的系数，并给出了方程组有解的条件（即系数行列式不为零），这已经非常接近现代行列式的定义。

行列式的由来

行列式的概念最早是在求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组时提出的。

- 1683 年，日本数学家关孝和在其著作《解伏题之法》中独立提出了行列式的概念。通过“行列式”（他称之为“行列”）来求解方程组，并给出了二阶、三阶乃至五阶行列式的展开方法，以及行列式展开的“逐式”方法（类似于拉普拉斯展开）。
- 1693 年，德国数学家莱布尼茨使用指标系统（下标）表示方程组的系数，并给出了方程组有解的条件（即系数行列式不为零），这已经非常接近现代行列式的定义。
- “determinant”最早是由高斯在数论研究（特别是二次型理论）中提出，之后被柯西采用，一直沿用至今。

行列式的由来

行列式的概念最早是在求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组时提出的。

- 1683 年，日本数学家关孝和在其著作《解伏题之法》中独立提出了行列式的概念。通过“行列式”（他称之为“行列”）来求解方程组，并给出了二阶、三阶乃至五阶行列式的展开方法，以及行列式展开的“逐式”方法（类似于拉普拉斯展开）。
- 1693 年，德国数学家莱布尼茨使用指标系统（下标）表示方程组的系数，并给出了方程组有解的条件（即系数行列式不为零），这已经非常接近现代行列式的定义。
- “determinant”最早是由高斯在数论研究（特别是二次型理论）中提出，之后被柯西采用，一直沿用至今。
- 行列式发展过程中需要提及的重要数学家有：克拉默，拉格朗日，范德蒙，雅可比，西尔维斯特等。

消元法解二元线性方程组

考虑如下二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

消元法解二元线性方程组

考虑如下二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

消元法解二元线性方程组

考虑如下二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

消元法解二元线性方程组

考虑如下二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

观察上述公式可得

- 分母相同，由方程组的四个系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 确定.
- 分子、分母都是四个数分成两对相乘再相减而得.

二阶行列式的定义

将二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的系数按照“横行竖列”的方式，得到如下数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

二阶行列式的定义

将二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的系数按照“横行竖列”的方式，得到如下数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

引入记号：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

则称 D 为由该数表所确定的二阶行列式。

二阶行列式的定义

将二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的系数按照“横行竖列”的方式，得到如下数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

引入记号：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

则称 D 为由该数表所确定的二阶行列式。

将上述行列式中的 $a_{11}, a_{21}(a_{12}, a_{22})$ 对应换成 b_1, b_2，则有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{21} \triangleq D_1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1 \triangleq D_2$$

故二元一次方程组的解表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

例 1

用二阶行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

目录

考虑三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

三阶行列式

考虑三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

由消元法得，若下三式中的分母不为零，

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

三阶行列式的定义

引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称 D 为三阶行列式。

三阶行列式的定义

引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称 D 为三阶行列式。显然，若 $D\neq 0$，三元一次方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

三阶行列式与二阶的关系

由三阶行列式的定义，

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

$$
= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
$$

$$
= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

观察前面的三阶行列式展开形式，发现：

- $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & * & * \\ * & a_{22} & a_{23} \\ * & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中的数表除去 a_{11} 所在行和列的元素之后剩余元素构成的行列式，其面前的符号由 a_{11} 的下标之和 $(-1)^{1+1}$ 决定。
- $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是三阶行列式 $\begin{vmatrix} * & a_{12} & * \\ a_{21} & * & a_{23} \\ a_{31} & * & a_{33} \end{vmatrix}$ 中的数表除去 a_{12} 所在行和列的元素之后剩余元素构成的行列式，其面前的符号由 a_{12} 的下标之和 $(-1)^{1+2}$ 决定。
- $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 是三阶行列式 $\begin{vmatrix} * & * & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & * \\ a_{31} & a_{32} & * \end{vmatrix}$ 中的数表除去 a_{11} 所在行和列的元素之后剩余元素构成的行列式，其面前的符号由 a_{13} 的下标之和 $(-1)^{1+3}$ 决定。

> 由此看出三阶行列式可以按第一行展开成二阶行列式的和（如果按照其他的方式进行合并的话，发现三阶行列式可以按任意行（或列）进行展开）。

记

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分别称为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式，并称

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}, A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}, A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$$

分别为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式。

- 三阶行列式可以表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

回顾二阶行列式的定义，类似于三阶行列式，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|$$
$$= (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}|$$

此处的 $|a_{22}|$ 表示的是单个数的一阶行列式，满足 $|a_{22}| = a_{22}$。这与绝对值不同，有时为了避免混淆，算到一阶行列式时直接用其本身来替代。

- $|a_{22}|$ 是二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & * \\ * & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的数表除去 a_{11} 所在行和列的元素之后剩余元素构成的行列式，其面前的符号由 a_{11} 的下标之和 $(-1)^{1+1}$ 决定。
- $|a_{21}|$ 是二阶行列式 $\begin{vmatrix} * & a_{12} \\ a_{21} & * \end{vmatrix}$ 中的数表除去 a_{12} 所在行和列的元素之后剩余元素构成的行列式，其面前的符号由 a_{12} 的下标之和 $(-1)^{1+2}$ 决定。

由此看出二阶行列式也可以按第一行展开成二阶行列式的和（如果按照其他的方式进行合并的话，发现二阶行列式也可以按任意行（或列）进行展开）。

目录

由二、三阶行列式的定义形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}|a_{22}| + (-1)^{1+2}a_{12}|a_{21}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

通过递归的方式给出一般的 n 阶行列式的定义。

n 阶行列式的定义：按首行展开

定义（n 阶行列式）

由 $n \times n$ 个数排成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示这样一个数：

1. 当 $n = 1$ 时，$D = |a_{11}| = a_{11}$；
2. 当 $n \geq 2$ 时，

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \\ &= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots + a_{1n} A_{1n} \end{aligned} \tag{1}$$

定义（n 阶行列式：续）

其中 M_{1j} $(j=1,2,\cdots,n)$ 是从 D 中划掉第 1 行、第 j 列后余下的 $(n-1)^2$ 个数（其相对顺序不变）所组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{1j} 的余子式：

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$$

称为元素 a_{1j} 的代数余子式。

- 将(1)式称为行列式 D 依第 1 行的展开式。与教材上稍有不同，但无本质差异。

类似的，可以给出任意元素 a_{ij} $(ij=1,2,\cdots,n)$ 的余子式的定义：从行列式 D 中划掉第 i 行、第 j 列后余下的 $(n-1)^2$ 个数（其相对顺序不变）所组成的 $n-1$ 阶行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对应的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

- 仅改变 a_{ij} 的取值，不会影响 M_{ij} 和 A_{ij} 的值，但会影响行列式的值。

n 阶行列式的定义注解

n 阶行列式的定义反映了如下特点：

- 行列式展开式中，每一项乘积都是由行列式中位于不同行且不同列的 n 个元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成；
- n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项；
- 在全部的 $n!$ 项中，带正好的项和带负号的项各占一半（可以通过数学归纳法证明）。

n 阶行列式的定义：按首列展开

定义 (可以通过数学归纳法证明与按首行展开等价)

由 $n \times n$ 个数排成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示这样一个数：

1. 当 $n = 1$ 时，$D = |a_{11}| = a_{11}$；
2. 当 $n \geq 2$ 时，

$$D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1}$$

例题

例 2

计算下列行列式

$$(1)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad (2)\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

行列式的对角线

称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线，相应的，$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角元。另外一条对角线称为副对角线。

例 3

证明 n 阶下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上的元素全为 0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，n 阶对角行列式（非主对角线上的元素全为 0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 4

计算如下 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix}$$

“$*$”表示元素为任意数。

目录

华中科技大学 数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics,Huazhong University of Science and Technology

如果按照 n 阶行列式的定义来计算行列式的话，需要做 $(n-1)n!$ 次乘法，显然当行列式的阶数很大的时候，这种计算方式是不可取的。因此有必要研究行列式的性质来简化计算。

行列式的性质

如果按照 n 阶行列式的定义来计算行列式的话，需要做 $(n-1)n!$ 次乘法，显然当行列式的阶数很大的时候，这种计算方式是不可取的。因此有必要研究行列式的性质来简化计算。

记

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \left(D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

为 D 的转置行列式（即将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式）。

性质 1:结合按首列展开形式和数学归纳法即可证明

行列式与其转置行列式的值相等，即 $D = D^T$.

性质 1 说明在行列式中，行和列的地位是平等的，因此对行成立的性质对列也成立。

例题

例 5

证明 n 阶上三角行列式（当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$，即主对角线以下的元素全为 0）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 基于例 3 和例 5，行列式的计算化简过程，就是如何将复杂行列式简化成上（下）三角行列式。

行列式的性质

在此不加证明的给出如下性质：（采用数学归纳法可以证明，证明过程比较繁琐，此处略，也可参考文献[1]第一章附录）

[1]居余马等，线性代数，清华大学出版社

行列式的性质

在此不加证明的给出如下性质：（采用数学归纳法可以证明，证明过程比较繁琐，此处略，也可参考文献[1]第一章附录）

性质 2:

行列式按任一行（或列）展开，其值相等，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{按任意行}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, j = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{按任意列}$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

[1]居余马等，线性代数，清华大学出版社

行列式的性质

性质 3:（由性质 2 即可证明）

行列式中某行有公因子，可提到行列式符号外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论:

行列式中某行的元素全部为 0 时，行列式的值为 0.

行列式的性质

性质 4:（由性质 2 即可证明）

行列式 D 中某行元素 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$，则该行列式可表示为如下两个行列式的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

性质 5:（对阶数采用数学归纳法即可证明）

行列式 D 中两行对应元素全相等，其值为 0。即当 $a_{il} = a_{jl}(i \neq j, l = 1, 2, \cdots, n)$ 时，有，则该行列式可表示为如下两个行列式的和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

结合性质 3 和性质 5，即可得到如下的推论。

推论:

行列式 D 中两行对应元素成比例（即 $a_{il}=ka_{jl}(i\neq j,l=1,2,\cdots,n)$，$k$ 为常数），其值为 0。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

行列式的性质

结合性质 2 和性质 5，可得如下定理：

定理 (重要的考点)

n 阶行列式 D 的任一行（列）的元素与其对应的代数余子式乘积之和等于 D；某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\begin{cases}D, i=j,\\0, i\neq j;\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\begin{cases}D, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$$

行列式的性质

由性质 4 和性质 5，即得如下性质：该性质在行列式计算过程中最为常用。

性质 6:

在行列式中，把某行各元素分别乘以非零常数 k，再加到另一行的对应元素上，行列式的值不变（简称：对行列式做倍加行变换，其值不变）。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 7: 反对称性质

行列式的两行对换，行列式的值反号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质：总结

上述所有性质对行成立，如此同时对列也是成立的。

性质中涉及行列式的三种变换：需要熟练掌握

1. 提出某一行（或列）的公因子，记作：$r_i \div k$ (列情形为 $c_i \div k$);
2. 把某一行（或列）的 k 倍加到另一行（或列），记作：$r_i + kr_j$ (列情形为 $c_i + kc_j$);
3. 互换某两行（或列），记作：$r_i \leftrightarrow r_j$ (列情形为 $c_i \leftrightarrow c_j$)

- 约定：把要操作的对象写在表达式的开头。
- 计算行列式的常用方法：通过上述三种变换将行列式化成上（下）三角行列式，从而计算行列式的值（注：变换的形式和次序不唯一，因人而异）。

例 6

计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

- 计算行列式之前需要观察行列式的结构，利用性质对行列式进行预处理，达到简化计算的目的。

行列式的性质：总结

行列式为零的三种情形

1. 某行（或列）的元素全为 0;
2. 两行（或列）的对应元素相等;
3. 两行（或列）的对应元素成比例。

行列式展开

1. 行列式可以按任一行（或列）展开;
2. 一行（或列）元素乘以另一行（或列）对应元素的代数余子式之和为 0.

例题

例 7

计算 5 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

例 8

设 A_{ij} 是 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 中元素的代数余子式，计算 $6A_{41} + 3A_{42}$.

行列式的性质：总结

其余两条简易且常用的性质

1. $D^T = D$;
2. 行列式的裂项;

例 9

设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$，计算 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 + 2c_1 & a_1 + 2b_1 + 3c_1 \\ c_2 & b_2 + 2c_2 & a_2 + 2b_2 + 3c_2 \\ c_3 & b_3 + 2c_3 & a_3 + 2b_3 + 3c_3 \end{vmatrix}$.

目录

法无定法，唯经验耳!

例 10

计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$D=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

法无定法，唯经验耳!

例 10

计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$D = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 10 常见考题形式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

例 10 常见考题形式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+n)\lambda^{n-1}$$

经典例题

例 11：例 10 的变种，爪型行列式的应用，也可以用升阶法或加边法

计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

例 11：例 10 的变种，爪型行列式的应用，也可以用升阶法或加边法

计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$D=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a), x_i\neq a.$$

例 11 常见考题形式

教材第一章课后习题第 7 题的第 4 小题：

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

例 11 常见考题形式

教材第一章课后习题第 7 题的第 4 小题：

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

$$D=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

例 12：例 11 的更一般化，爪型行列式的应用，也可以用升阶法或加边法

计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$D = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i), x_i \neq a_i.$$

例 12 常见考题形式

第一章课后习题第 7 题的第 1 小题：

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

例 12 常见考题形式

第一章课后习题第 7 题的第 1 小题：

$$D=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$D=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i-m\right)(-m)^{n-1}.$$

2003 年数学三考研题：

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

例 12 常见考题形式

第一章课后习题第 7 题的第 1 小题：

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) (-m)^{n-1}.$$

2003 年数学三考研题：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b \right) b^{n-1}.$$

思考题

计算如下 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

思考题

计算如下 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$D = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}.$$

爪型行列式

形如如下形式的行列式（假定 $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称之为爪型行列式。

爪型行列式

形如如下形式的行列式（假定 $a_{ii}\neq 0$, $i=1,2,\cdots,n$）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称之为爪型行列式。

固定做法：分别将第 i $(i=2,\cdots,n)$ 乘以 $-\frac{a_{i1}}{a_{ii}}$ 加到第 1 列，将原行列式转化为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中

$$a_{11}^*=a_{11}-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}a_{i1}}{a_{ii}}$$

爪型行列式例题

例 13

计算如下 $n+1$ 阶行列式 (假设 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$):

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

例 13

计算如下 $n+1$ 阶行列式 (假设 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$):

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$D = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

例 14

计算如下三对角行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

例 14

计算如下三对角行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

- 按第一行展开，得递推关系

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}\Longrightarrow D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$$

归纳法求行列式

与递推过程相反的方法是归纳. 如要计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 3 & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

1. 先计算几步得出猜想：例如计算得

$$D_1 = 3 = 2^2 - 1, D_2 = 7 = 2^3 - 1, D_3 = 15 = 2^4 - 1,$$

猜想

$$D_n = 2^{n+1} - 1.$$

2. 再利用数学归纳法加以证明。

例 15

证明 n 阶范德蒙（Vandermonde）行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

其中 $\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$ 表示所有因子 $a_i-a_j(i>j)$ 的连乘积。

- 采用数学归纳法即可证明。

范德蒙行列式的应用

例 16

计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^2 b_1 & a_2^2 b_2 & a_3^2 b_3 & a_4^2 b_4 \\ a_1 b_1^2 & a_2 b_2^2 & a_3 b_3^2 & a_4 b_4^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \end{vmatrix}, \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4)$$

- 将每一列提取公因子 a_i^3 $(i = 1, 2, 3, 4)$，再利用范德蒙行列式即可求得结果。

例 17

计算 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

- 将第 $n+1$ 行逐次与前面各行交换到第 1 行，再将新的第 $n+1$ 行逐次交换至第 2 行，重复下去直到得到范德蒙行列式的形式，则有

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{1 \le j < i \le n} [(a-i)-(a-j)] = \prod_{k=1}^{n} k!$$

例 18

计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

- 通过增加一行一列的形式，将待求行列式转化成标准范德蒙行列式的形式，利用多项式的系数关系，有

$$D = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

拉普拉斯（Laplace）定理 ⋆

定义 (子式与余子式)

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(1 \leq k \leq n)$，位于这 k 行 k 列交叉处的 k^2 个元素按照原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个k 阶子式。当 $k < n$ 时，在 D 中划去这 k 行 k 列，余下的元素按照原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 k 阶子式 M 的余子式。

定义 (代数余子式)

设 n 阶行列式 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别为 $i_1, i_2 \cdots, i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，则 M 的余子式 M' 前面加上符号

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$$

后称为 M 的代数余子式。

定理 (拉普拉斯（Laplace）定理)

设在行列式 D 中任意取定 $k(1 \le k \le n-1)$ 行，由着 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与他们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D。

例 18

利用拉普拉斯定理计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

- 该定理还可以用来证明：方阵乘积的行列式等式各自行列式的乘积。

目录

二、三元一次方程组解

二元一次方程组：系数行列式不等于 0

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

三元一次方程组：系数行列式不等于 0

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \Longrightarrow x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

上述二、三元一次方程组解的形式能否推广到如下 n 元一次方程组？

考虑如下 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\tag{2}
$$

其系数行列式为

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

假定系数行列式 $D \neq 0$.

定理

若方程组(2)的系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 是把行列式 D 中的第 j 换成方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所成的行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理证明思路：存在性

该定理的证明分成两个部分：

(1). 解的存在性 将 $x_j = D_j/D, j = 1, 2, \cdots, n$ 代入到方程组的第 i 个方程中，验证

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{ij}A_{sj}b_s$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}\right) b_s = \frac{1}{D}\cdot Db_i = b_i$$

由此说明 $x_j = D_j/D, j = 1, 2, \cdots, n$ 是方程组的一个解，即方程组的解存在。

定理证明思路：唯一性

(2). 解的唯一性 假设方程组存在另一组解 $x_j = c_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 即有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

用 D 的第 k 列元素的代数余子式 $A_{1k}, \cdots, A_{nk}$ 分别乘以上面 n 个等式，有

$$A_{ik}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = A_{ik}b_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

将上述 n 个等式相加有

$$Dc_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}b_i = D_k$$

即有 $c_k = D_k/D, k = 1, 2, \cdots, n$，由此说明方程组解的唯一性。

例题

例 19

解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Cramer 法则的局限性

1. Cramer 法则面对的线性方程组要满足两个条件: (1) 未知量个数和方程组个数相同, (2) 系数行列式 $D \neq 0$;
2. Cramee 法则从理论上解决了一少部分线性方程的求解问题。然而,当方程的规模很大时候,此法也仅仅有理论意义,没有可操作性,主要原因在于它需要计算数量庞大的高阶行列式,相较而言高斯消元法是比较行之有效的方法。
   - Cramer 法则计算乘法的次数为
   $$(n+1)(n-1)n! + n.$$
   - 高斯消元法计算乘法的次数为
   $$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}.$$

齐次线性方程组

若线性方程组(2)的右端常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$全为零时，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

则称方程组(3)为齐次线性方程组。若常数项不全为零时，则称方程组(2)为非齐次线性方程组。

- 显然，齐次线性方程组(3)总有解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，称之为零解。若一组解 $x_1, \cdots, x_n$ 不全为零，则称之为非零解。
- 齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解。

齐次线性方程组

定理

如果齐次线性方程组(3)的系数行列式 $D \neq 0$，则它只有零解，或者说，如果齐次线性方程组(3)有非零解，则必有系数行列式 $D = 0$.

例 20

问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解.

Thanks for your attention!